A N A L I Z A   F U N K C J O N A L N A

WPPT II r., sem. letni
EGZAMIN 1

Wrocław, 16 czerwca 2016

ZADANIE 1. Niech $p, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Niech f będzie zespoloną funkcją mierzalną na $[0,1]$ taką, że

$$\int |f|^p \, dx = 1$$

(wszystkie całki w tym zadaniu są liczone po przedziale $[0,1]$).

(a) [8p] Korzystając z tw. Hahna-Banacha wykaż, że na $[0,1]$ istnieje zespolona funkcja mierzalna g spełniająca:

$$\int |g|^q \, dx = 1 \quad \text{oraz} \quad \int fg \, dx = 1.$$

(b) [4p] Znajdź konkretny wzór na funkcję g i upewnij się, że spełnia ona obydwa warunki (*Wsk. Zachodzi wzór* $(p-1)q = p$).

ROZWIĄZANIE:

(a) Wiemy, na mocy twierdzenia Landaua, że sprzężoną do $L^p([0,1])$ jest $L^q([0,1])$, w tym sensie, że każdy funkcjonał na $L^p([0,1])$ jest postaci $P_g(f) = \int fg \, dx$, gdzie $g \in L^q([0,1])$. Tak więc w zadaniu chodzi o znalezienie funkcjonału $P_g \in L^q([0,1])$ o normie 1 i takiego, że $P_g(f) = 1 = \|f\|$, czyli ,,wyciągający normę" z f. Istnienie takiego funkcjonału, to znany nam wniosek z Tw. Hahna–Banacha. Koniec.

Absurdalnym pomysłem jest napisanie, że $L^p \subset L^q$ i usiłowanie ,,przedłużenia" funkcji $f \in L^p$ do jakiegoś elementu g z L^q. Czegoś takiego nie wymyśliłbym nawet poddawany najgorszym torturom!

(b) Jeśli jednak chcemy funkcję g podać jawnie, to rozumijemy tak: funkcja $|f|^p$ ma całkę 1, a my chcemy, żeby fg miało całkę 1. Więc dążmy do tego, żeby $fg = |f|^p$. A więc kładziemy

$$g = \frac{|f|^p}{f}$$

(z konwencją $\frac{0}{0} = 0$). Wtedy rzeczywiście $fg = |f|^p$, więc całka z fg wynosi 1. Pozostaje sprawdzić, czy tak zdefiniowana funkcja spełnia warunek, że całka z $|g|^q$ równa się 1. Ale

$$|g|^q = \frac{|f|^{pq}}{|f|^q} = |f|^{pq-q} = (\text{na mocy wskazówki}) = |f|^p,$$

a to ma całkę 1 z założenia.

ZADANIE 2. Niech H oznacza przestrzeń Hilberta.

(a) [4p] Wykaż, że jeśli H jest rzeczywista, to $u \perp v \iff \|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.

(b) [2p] Podaj kontrprzykład na (a) w przestrzeni zespolonej.

(c) [6p] Niech $H_0 \subset H$ będzie domkniętą podprzestrzenią i niech $v \in H_0$, $u \in H$. Wykaż, że $v \perp u \iff v \perp u_{H_0}$, gdzie u_{H_0} oznacza rzut ortogonalny wektora u na podprzestrzeń H_0.

ROZWIĄZANIE:
(a) Mamy

$$\|u+v\|^2 = \langle u+v, u+v\rangle = \langle u,u\rangle + \langle u,v\rangle + \langle v,u\rangle + \langle v,v\rangle = \\ \|u\|^2 + \|v\|^2 + \langle u,v\rangle + \overline{\langle u,v\rangle} = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\mathrm{Re}(\langle u,v\rangle).$$

W przestrzeni rzeczywistej można pominąć ,,Re" i równość wychodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $\langle u,v\rangle = 0$, czyli gdy wektory u i v są prostopadłe.
(b) Najprostszą przestrzenią zespoloną jest płaszczyzna zespolona $\mathbb{C}$, a norma to po prostu moduł. Weźmy wektory $u = i$ oraz $v = 1$. Wtedy $\|u+v\|^2 = |i+1|^2 = 2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$, natomiast wektory te nie są prostopadłe, bo $\langle i,1\rangle = i\langle 1,1\rangle = i$, co jest różne od zera.
(c) Rozpiszmy u jako $u_{H_0} + (u - u_{H_0})$. Wiemy, że ten drugi wektor jest prostopadły do H_0. Zatem

$$\langle u,v\rangle = \langle u_{H_0}, v\rangle + \langle u - u_{H_0}, v\rangle = \langle u_{H_0}, v\rangle.$$

Tak więc lewa strona równa się zero (a to jest warunek na $u \perp v$) wtedy i tylko wtedy, gdy zeruje się prawa strona (a to jest warunek na $u_{H_0} \perp v$).

ZADANIE 3. [12p] Wykaż, że w przestrzeni Banacha $C([0,1])$ ciąg funkcji f_n zbiega słabo do funkcji f wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg $|f_n|$ jest ograniczony wspólną stałą i f_n zbiegają do f w każdym punkcie.
(*Wsk. Skorzystać z jednego z twierdzeń Riesza i jednego z twierdzeń Lebesgue'a*).

ROZWIĄZANIE:
Jeśli $f_n \to f$ słabo, to wiemy, że ciąg f_n jest ograniczony w normie. Normą na $C([0,1])$ jest norma supremum, co oznacza, że funkcje $|f_n|$ są ograniczone wspólną stałą. Dalej, funkcjonałami na $C([0,1])$ są dowolne miary skończone, w szczególności tzw. delty Diraca δ_x gdzie $x \in [0,1]$. Zatem dla każdego $x \in [0,1]$ musi zachodzić zbieżność

$$\int f_n \, d\delta_x \to \int f \, d\delta_x.$$

Ale całka deltą Diraca, to wartość w punkcie, więc powyższy napis oznacza, że

$$f_n(x) \to f(x),$$

czyli mamy zbieżność w każdym punkcie.

Na odwrót. Załóżmy oraniczoność modułów z f_n pewną wspólną stałą oraz zbieżność w każdym punkcie. Zbieżność słabą wystarczy testować na funkcjonałach nieujemnych, bo one tworzą zbiór liniowo gęsty. Każdy taki funkcjonał, to miara skończona na $[0,1]$. Zatem mamy sprawdzić, czy dla dowolnej takiej miary μ zachodzi zbieżność

$$\int f_n \, d\mu \to \int f \, d\mu.$$

Ale wobec zbieżności punktowej i wspólnej ograniczoności stałą (która na przestrzeni z miarą skończoną jest oczywiście całkowalna z całką skończoną) jest bezpośrednią konsekwencją twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej.

Tomasz Downarowicz